

Rappel de la statique

Micro-200 Semaine 1a

Objectifs d'apprentissage de ce chapitre (mardi 09.9.25)

- Définir et comprendre: forces et moments de forces
- Savoir que le **Moment d'une force** est différent d'un **moment « pur » (= un couple)**
- Savoir dessiner un diagramme des forces
 - Identifier les forces de liaison
 - Expliquer la différence entre forces externes et forces internes à un système
- Utiliser les équations de la statique pour résoudre des problèmes simples de statique

Objectifs de la mécanique des structures:

- Conception d'objets pour un niveau de rigidité souhaité
 - Choix des matériaux + choix de la géométrie pour minimiser la déformation, assurer la précision
- Conception pour résistance à défaillance
 - S'assurer que les contraintes internes soient en dessous des seuils critiques avec une marge de sécurité suffisante

En relation avec

- Performance
- Coût
- Faisabilité
- Empreinte écologique
- Recyclage
- Production
- Design / mode



<https://www.baader-planetarium.com/de/blog/upgrade-of-the-open-universitys-coast-and-pirate-telescopes-on-tenerife/>



<https://depositphotos.com/289712816/stock-photo-broken-teeth-gear-mechanical-workshop.html>

- Pour cette conception des structures:
 - fonction
 - fiabilité
 - durabilité, etc

Nous avons besoin de calculer les forces **internes** pour savoir comment le système se déforme (ou s'il casse)

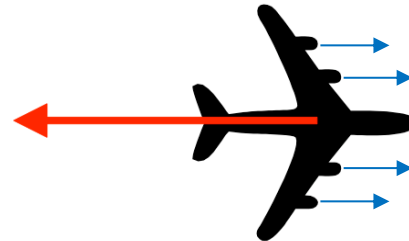
- Pour ce: **Rappel de la statique !**

Un avion vole horizontalement à vitesse constante.

Les forces de frottement exercées sur l'avion sont assimilables à une seule force horizontale (flèche rouge)

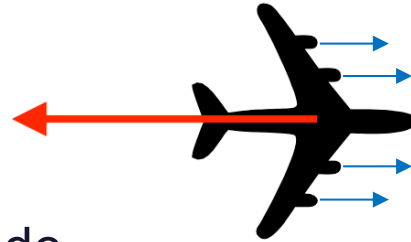
La composante horizontale de la poussée des réacteurs (en norme) est:

- a. plus grande que la force de frottement
- b. égale à la force de frottement
- c. inférieure à la force de frottement
- d. La poussée est verticale



url: ttpoll.eu
(ou turnpoint point app)
Session: *micro200*

La composante horizontale de la poussée des réacteurs (en norme) est



- A. Plus grande que la force de frottement
- B. Egale à la force de frottement
- C. Inférieure à la force de frottement
- D. La poussée est vertical



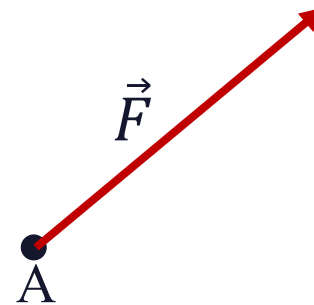
Statique des systèmes

1. Rappel forces et moments
2. Diagramme des forces + Forces de liaisons
3. Problèmes de Statique

R1. Rappel forces et Moments

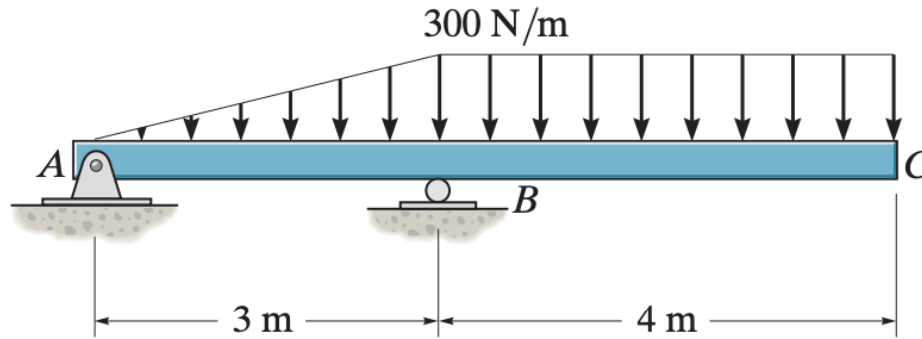
Une force est caractérisée par:

- point d'application
- direction
- norme

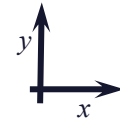
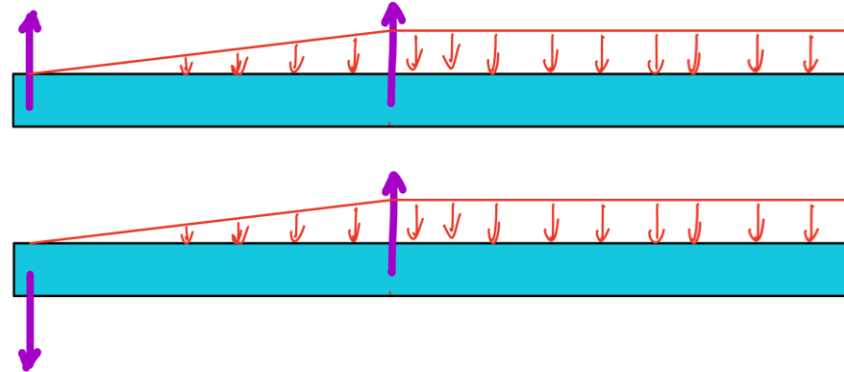


Force = un vecteur lié à un point

Que faire si on ne connaît pas le sens physique d'une force avant d'avoir résolu le problème ...

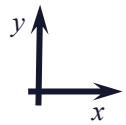


ou ?



Que faire si on ne connaît pas le sens physique d'une force avant d'avoir résolu le problème ?

On dessine la force dans un sens arbitraire, puis on résout et on regarde le signe de la Force obtenue (du coefficient « a »):



$$F = a \vec{e}_x$$

Si $a > 0$ \vec{F} dans sens $+\vec{e}_x$
Si $a < 0$ \vec{F} dans sens $-\vec{e}_x$



$$F = -a \vec{e}_x$$

Si $a > 0$ \vec{F} dans sens $-\vec{e}_x$
Si $a < 0$ \vec{F} dans sens $+\vec{e}_x$

Que faire si on ne connaît pas le sens physique d'une force avant d'avoir résolu le problème ?

On dessine la force dans un sens arbitraire, puis on résout et on regarde le signe de la Force obtenue (du coefficient « a ») Exemple:

Moments, tous ces moments...

1. Moment d'une force [Nm] $\vec{M}_O = \vec{OA} \square \vec{F}$

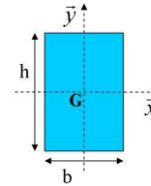
Pour diagramme des forces

2. Moment "pur" = couple externe [Nm] \vec{M}_0



Pour flexion + cisaillement
des poutres + Torsion

3. Moment quadratique [m⁴]
(ou moment d'inertie...)



$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$



$$I_P = \int_A r^2 dA$$

4. Moment statique [m³]

Dynamique (dépend de la masse), pas dans ce cours

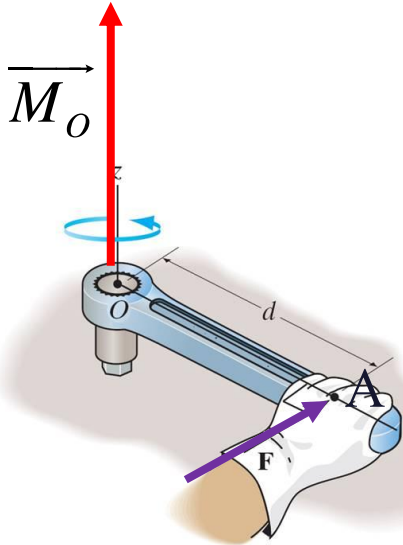
Pour dynamique
(accélération, rotation, etc)

- Moment quadratique (moment d'inertie) [kg·m²]

- Moment cinétique = Moment angulaire [kg·m²·s⁻¹]

$$L_O = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_{O,i} \square \vec{p}_i)$$

Moment de la force F , appliquée au point A , calculé au point O



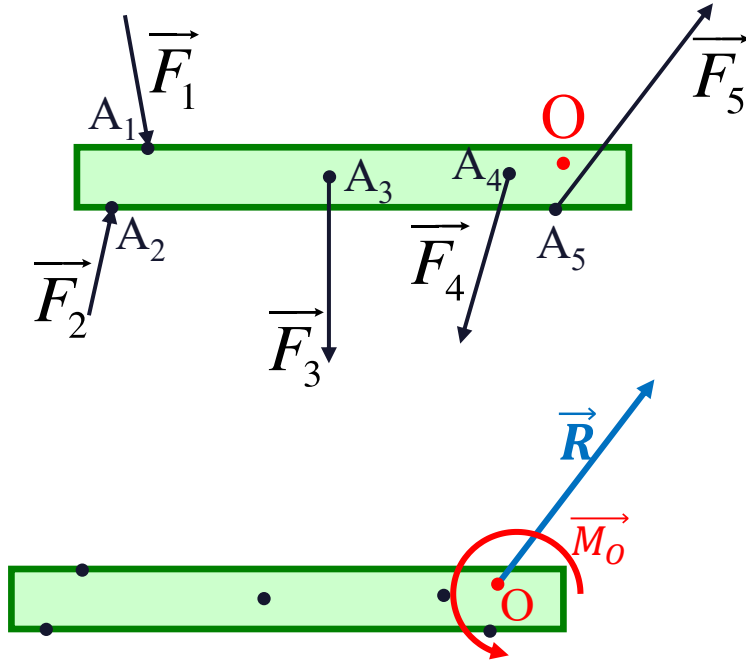
$$\vec{M}_O = \vec{OA} \square \vec{F}$$

Le Moment \vec{M}_O de \vec{F} dépend du choix du point O

\vec{M}_O est perpendiculaire à \vec{F} et à \vec{OA}

- La force est appliquée en un point (ici A): ce point est imposé
- Pour tout point O , on peut calculer le moment d'une Force F à ce point O
Vous choisissez le point O
- Le point O est souvent un axe de rotation, mais peut être n'importe quel point qui vous convient

Tout ensemble de forces peut être réduit à 2 éléments



Force Résultante (en O)

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

et

Moment selon O

$$\vec{M}_O = \sum (\overrightarrow{OA_i} \times \vec{F}_i)$$

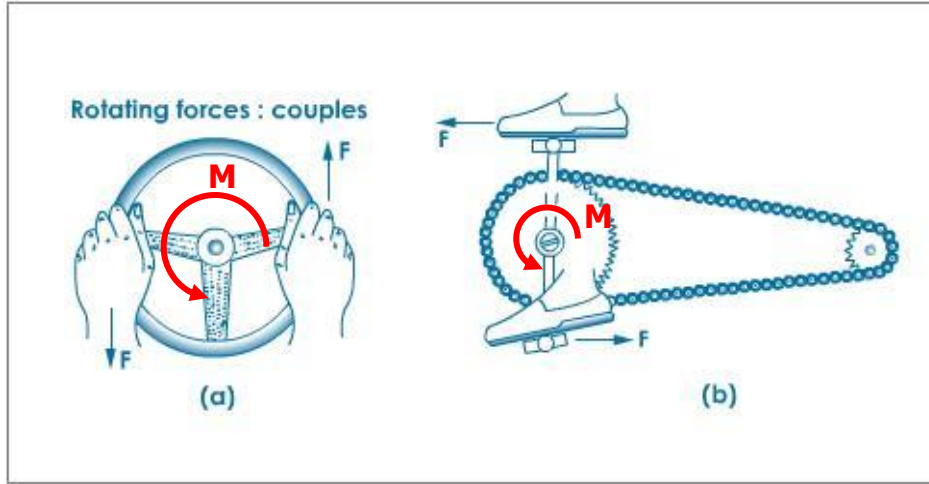
(ce moment dépend du choix de O)

Le choix du point O est arbitraire

Mais attention: \vec{M}_O dépend de O !

On peut parfois choisir point O afin que $\vec{M}_O = 0$

Parfois, la force résultante R est nulle....

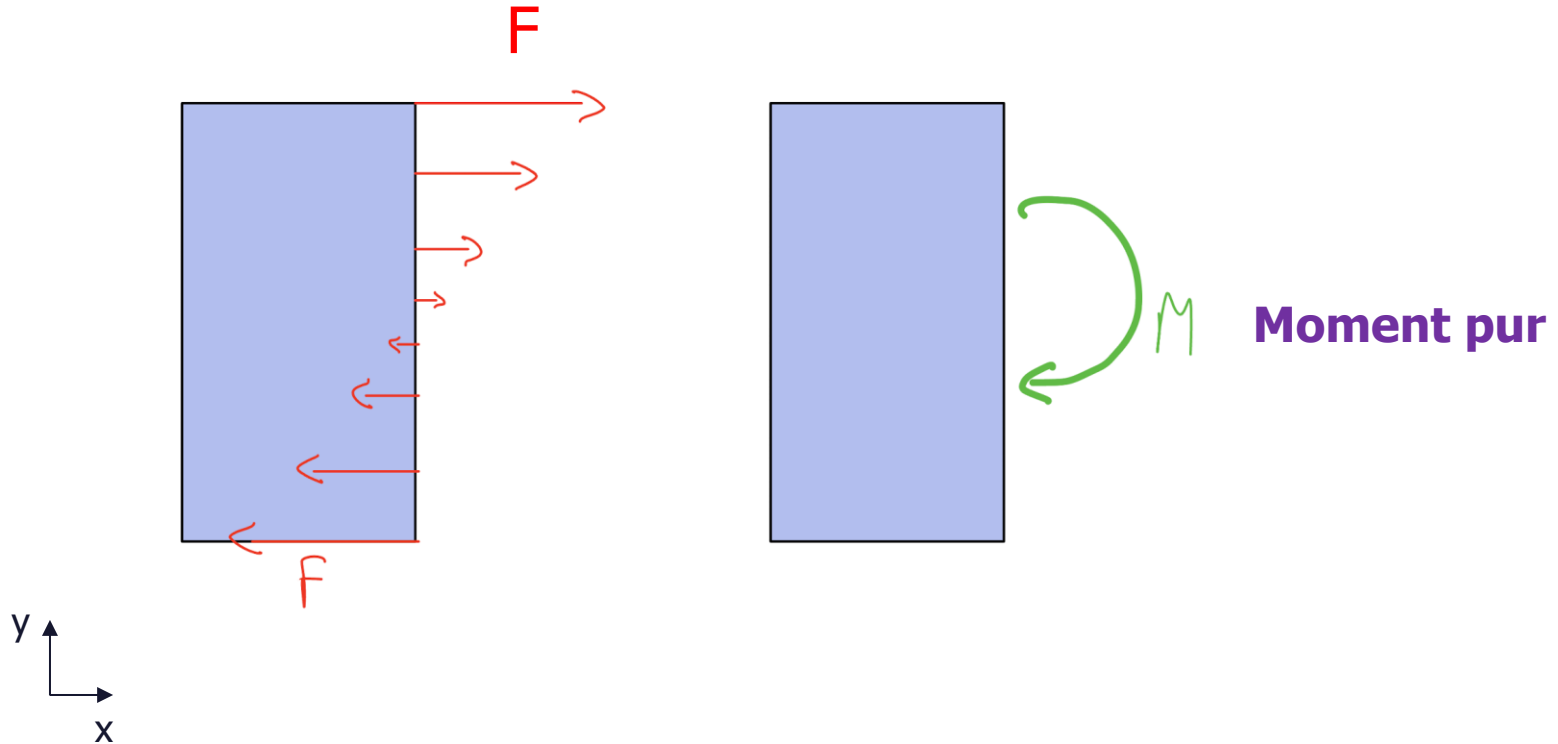


La somme des forces sur un volant ou sur un pédalier de vélo sont nulles, mais l'effet de ce « couple » n'est certainement pas nul!

On peut remplacer ces 2 forces égales et opposées par un moment “pur” = couple

Nous aurons souvent des moments, sans force associé

Parfois, la force résultante $R = 0$ et génère un couple



Lors de la somme des moments, on inclut toujours TOUS les moments « purs » appliqués au système, peu importe leur point d'application

Important!

Equations de la Statique:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0$$

$$\sum \vec{M}_{ext, \text{ au point Z}} = 0$$

Somme des moments, c'est la somme de:

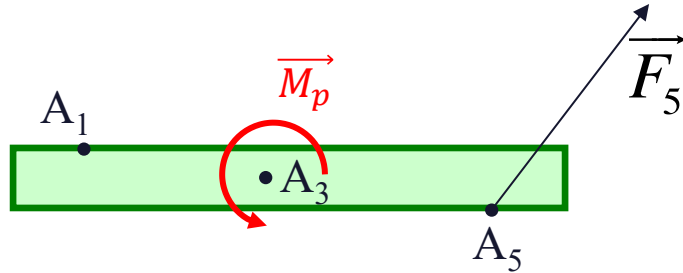
✓ des moments de toutes les forces, calculé au au point Z

et de

✓ de tous les moments "pur" (couples), peu importe leur point d'application

Rappel: Libre choix du point Z pour la somme des moments.
Ce point n'est pas nécessairement un pivot ou un point de rotation.

Exemple: Somme des Moments aux points A_1 , A_3 , et A_5



Donnés pour forces et moments externes:

- Moment \vec{M}_p en A_3
- Force \vec{F}_5 en A_5

Somme des moments au point A_1 : $\sum moments = \vec{M}_p + \overrightarrow{A_1A_5} \times \vec{F}_5$

Somme des moments au point A_3 : $\sum moments = \vec{M}_p + \overrightarrow{A_3A_5} \times \vec{F}_5$

Somme des moments au point A_5 : $\sum moments = \vec{M}_p$

R2. Diagramme des forces

Forces et moments de réaction

Objectifs:

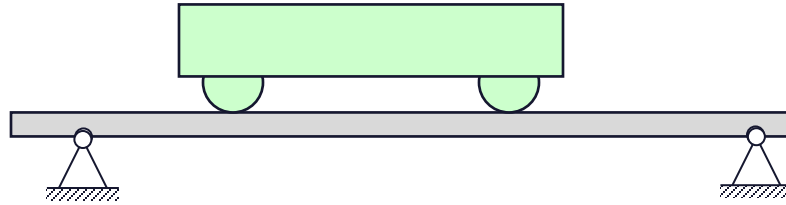
- Identifier forces et moments de réactions des supports.
- Dessiner diagramme des forces.
- Savoir diviser en sous-systèmes



Ici, des problèmes plans (2D) pour simplification

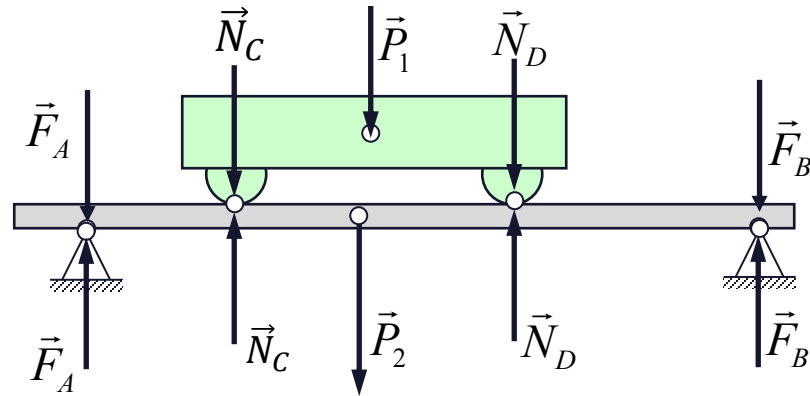
*Les photos de cette partie proviennent principalement du Chapitre 5 de livre de Hibbeler « Statics »

- Chariot sur un plan qui est soutenu par deux supports



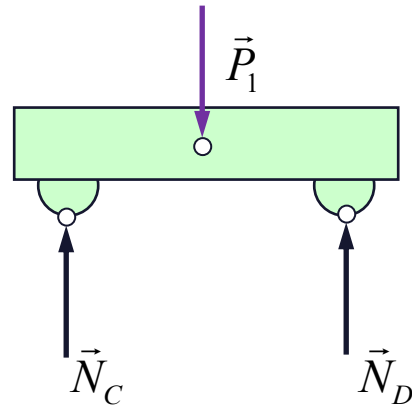
Dessiner le diagramme des forces du **chariot**

Exemple de comment
ne **pas** faire!



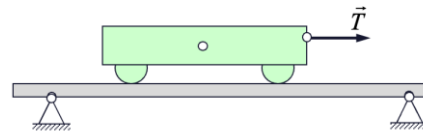
Attention: ne **jamais** faire des dessins comme ceci
mélangeant forces internes et externes au système !

Isoler le Système **Chariot**:
n'indiquer que les forces
externes sur le chariot



Dessin correct pour le chariot :
*on ne dessine que les forces
externes au chariot*

Quel diagramme des forces est juste pour le système « Chariot + Plan »?



Quizz!

- A. A
- B. B
- C. C
- D. D

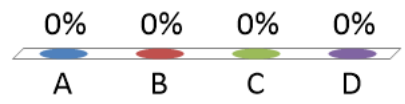
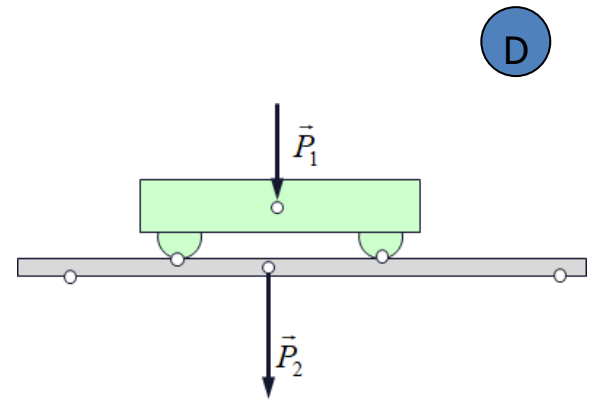
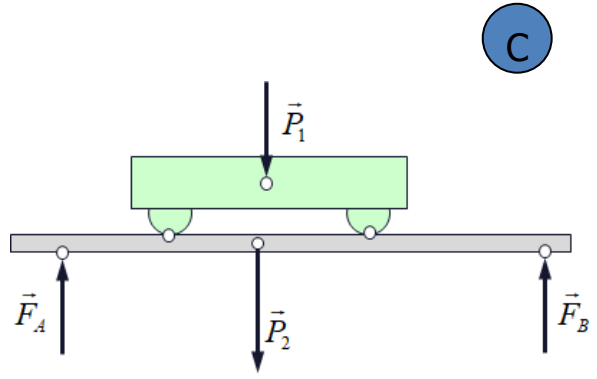
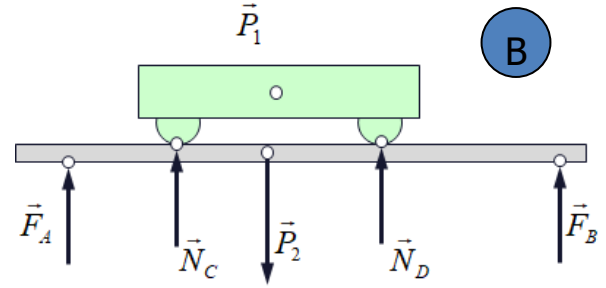
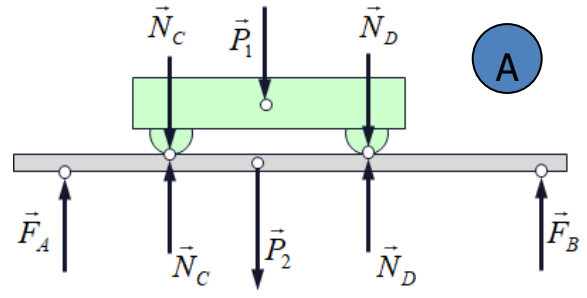


Diagramme des Forces *Free Body Diagram (FBD)*

- Le diagramme des forces montre toutes les forces et tous les moments externes sur un objet (et donc inclut les forces et moments de réaction du sol des murs sur cet objet)
- Il faut choisir et **indiquer un système de coordonnées**
- **Ne pas dessiner de supports, de murs:** *ne dessiner que l'objet en question*

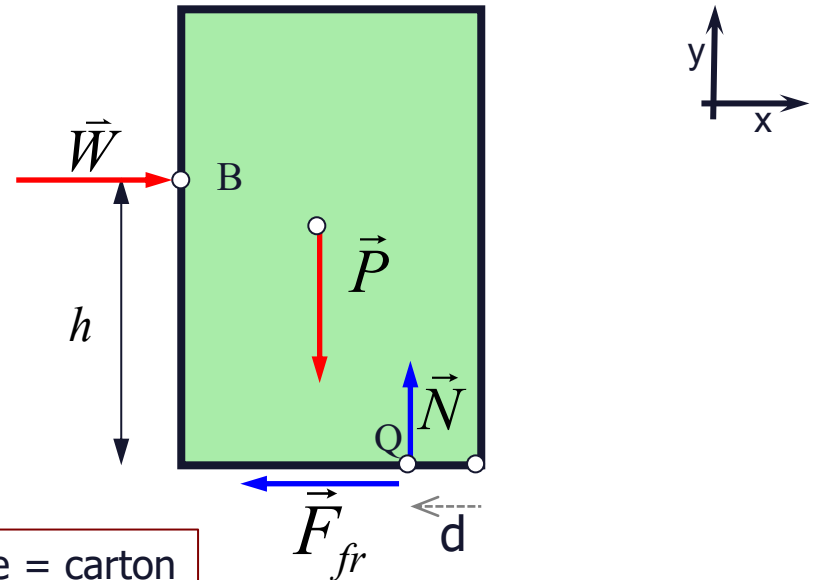
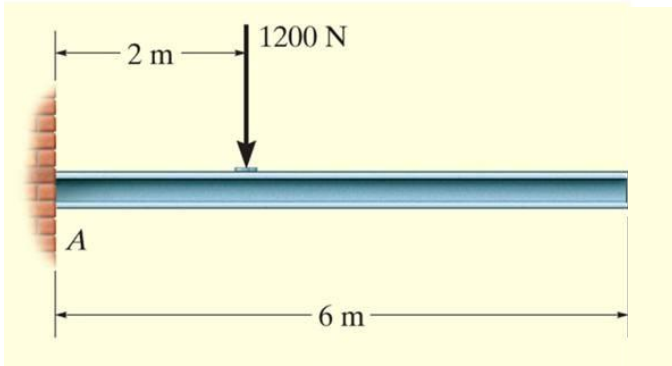


DIAGRAMME des FORCES



Modèle simplifié

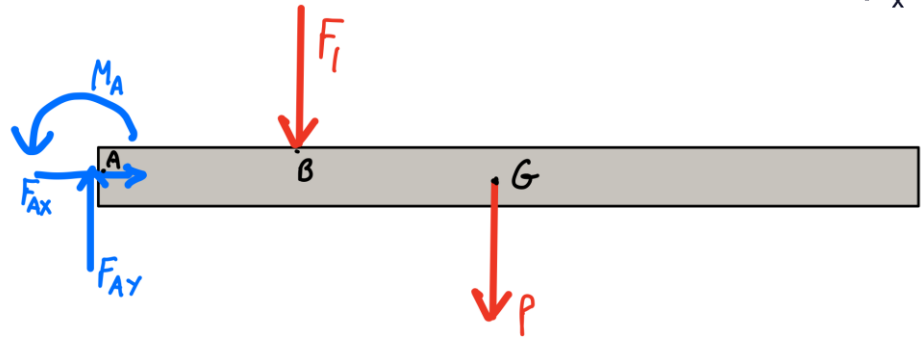
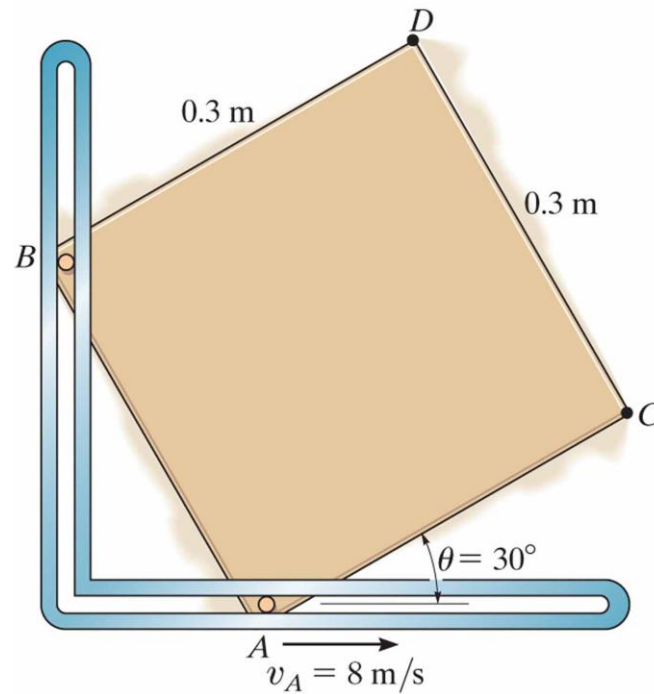


Diagramme des forces

IMPORTANT!

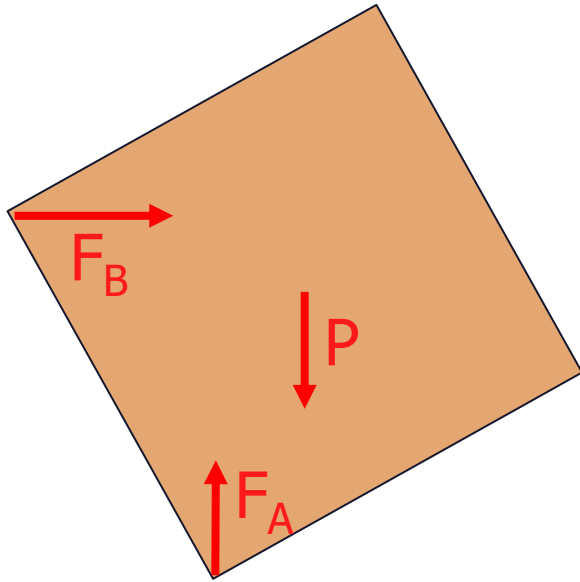
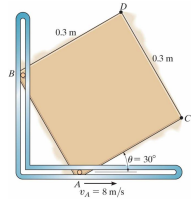
1. Dessiner l'objet "isolé". Dessiner son pourtour **sans les supports**
2. Mettre en évidence toutes les forces externes et tous les moments externes :
 - a) charges, b) force/moments de réaction et c) poids
3. Nommer les forces et moments: Pour les inconnues, utiliser par exemple A_x , A_y , M_A , etc
4. Choisir et indiquer un système de coordonnées



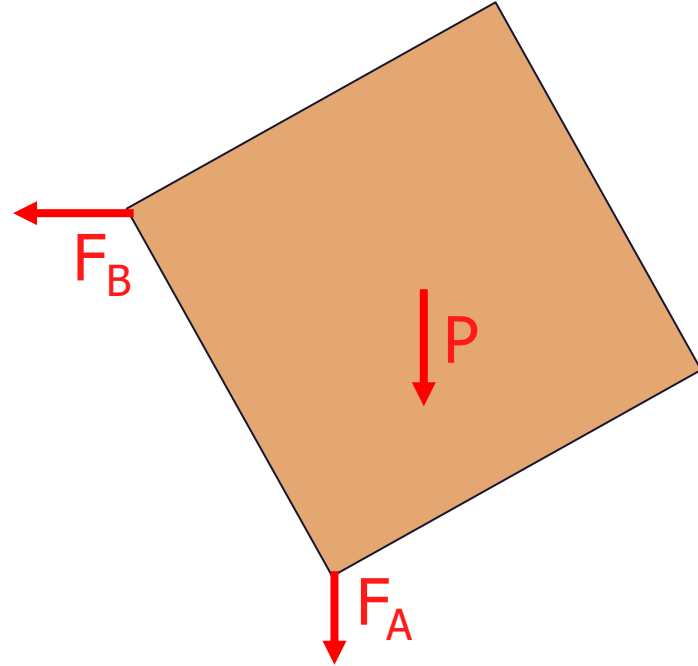
Dessinez le diagramme des forces du carré brun

- a) Sans frottements
- b) Avec frottements

sans frottements

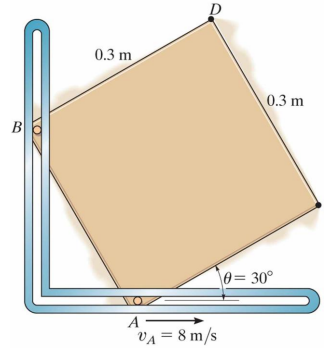
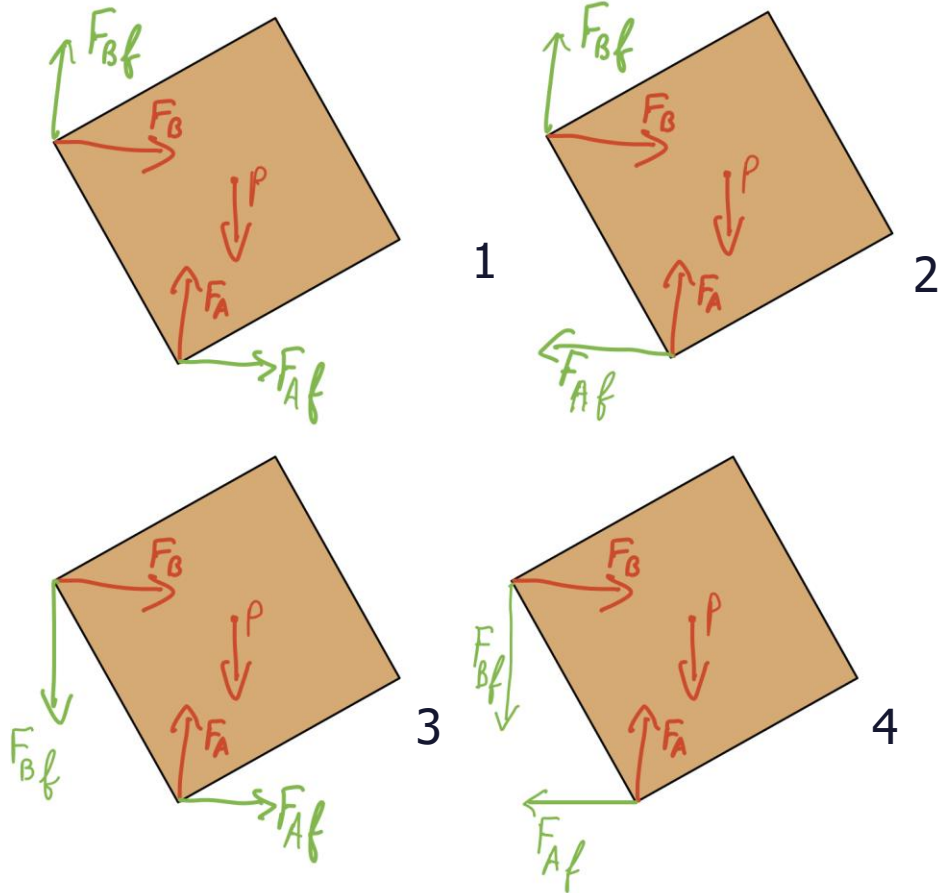


OK



aussi OK ?

avec frottements, quel est le bon dessin?



- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4



Forces et Moments de Liaisons

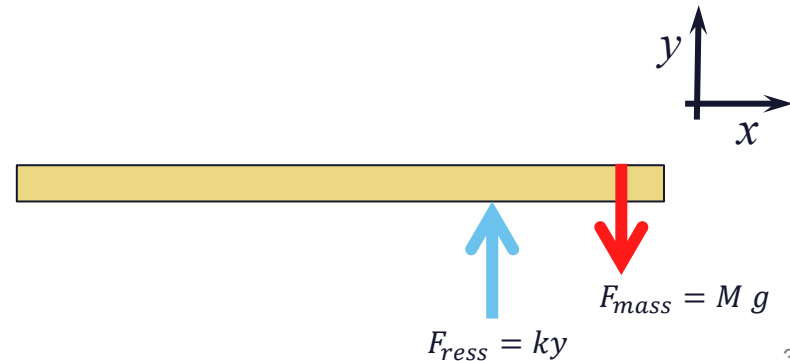
- Les forces de liaisons caractérisent le contact de deux solides.
- Il s'agit d'un **groupe de forces et de moments**
- Selon le point de vue (contraintes, mobilités), on parle d'articulations ou de contraintes

Liaisons sont soit:

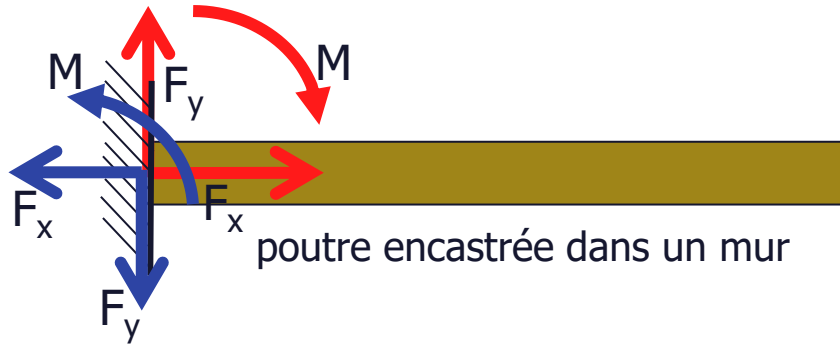
- Parfaites (=infiniment rigides). Elles bloquent 1 ou plusieurs degrés de liberté
- Élastiques

Liaisons élastiques

- Une liaison élastique ne bloque pas un degré de liberté
- ressort en extension (force) et en torsion (moment)
- $F = -kx$ et
- $M = -k_\theta\theta$

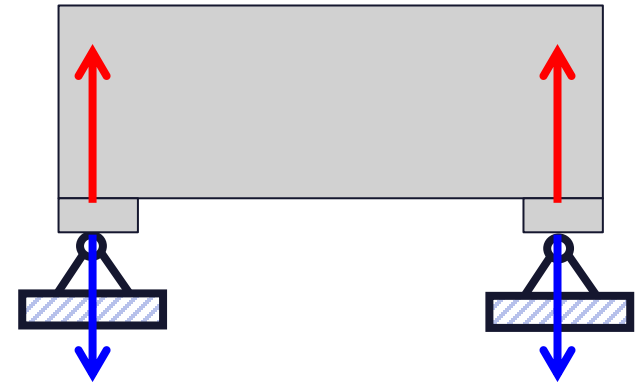


Liaisons parfaites: Ils limitent les mouvements des corps en empêchant la translation et/ou la rotation.

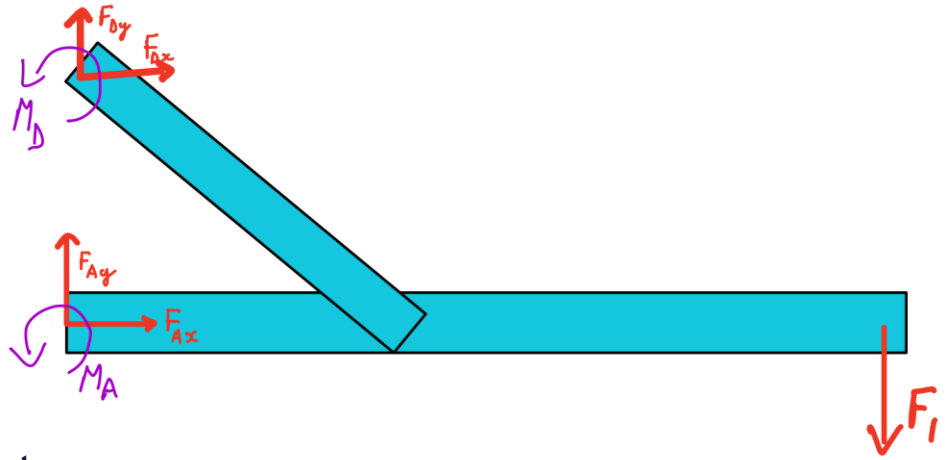
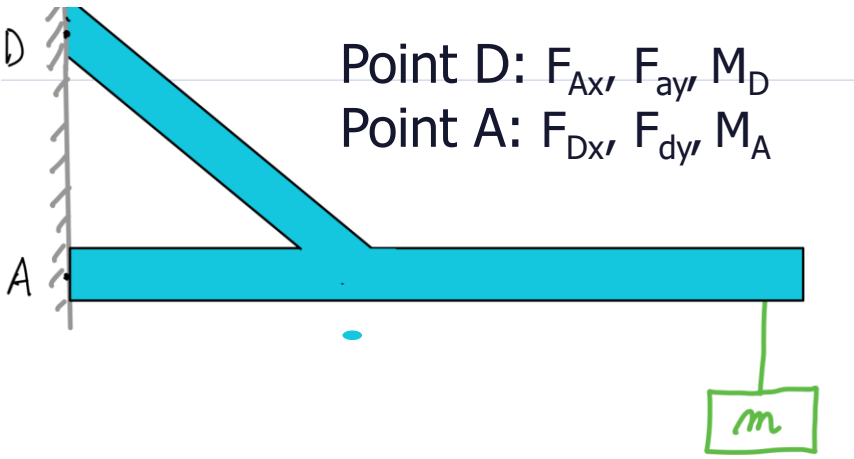


(dessin avec animation)

- Quand deux corps sont en contact, nous avons des forces de liaisons, égales et opposées (action=réaction)
- Faire attention à bien définir le SYSTEME

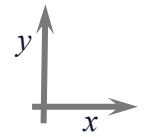


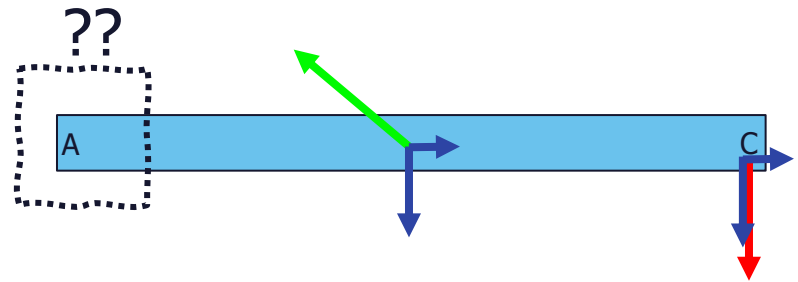
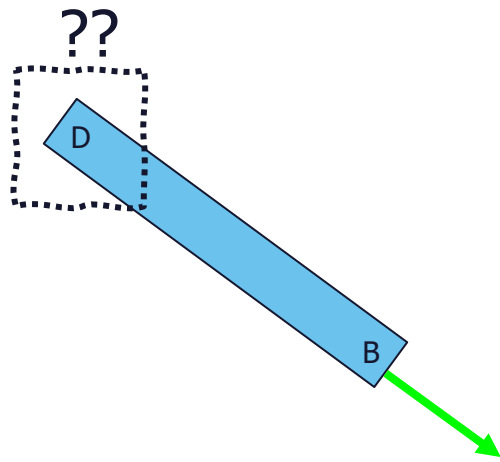
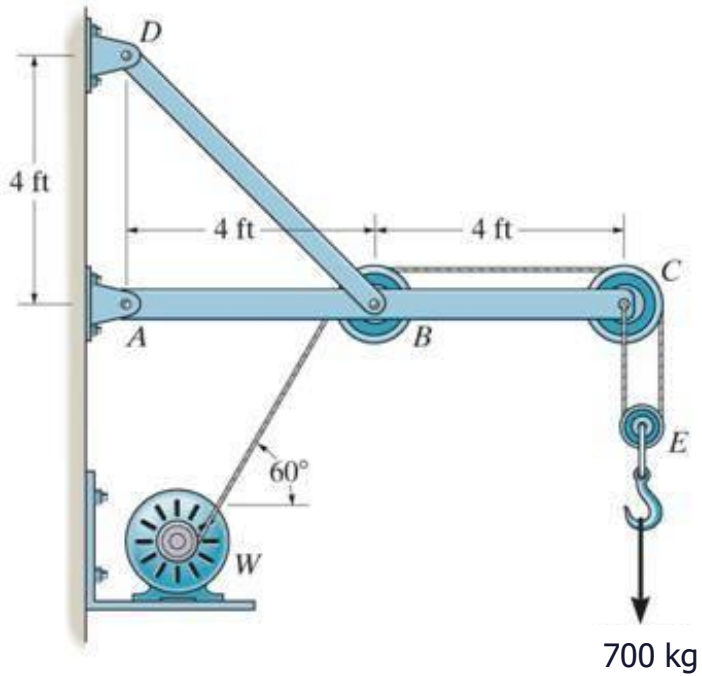
Exemple support avec liaisons parfaites

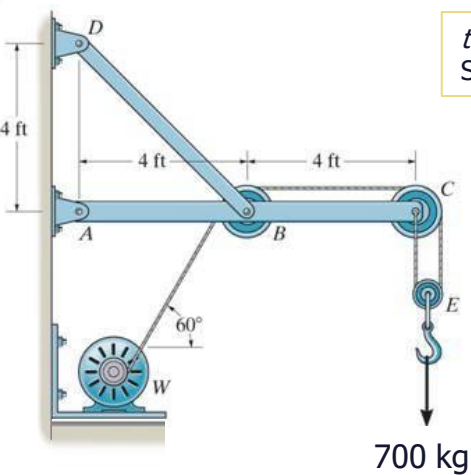


Méthode pour les réactions des supports:

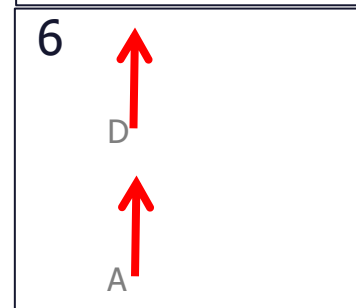
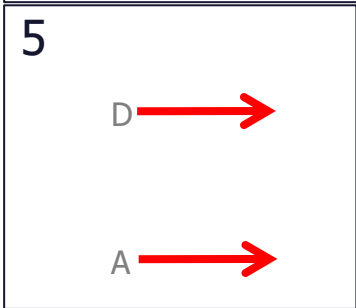
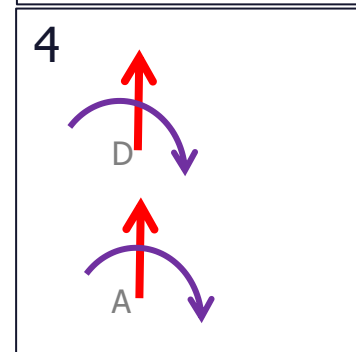
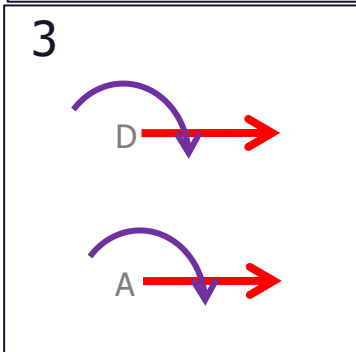
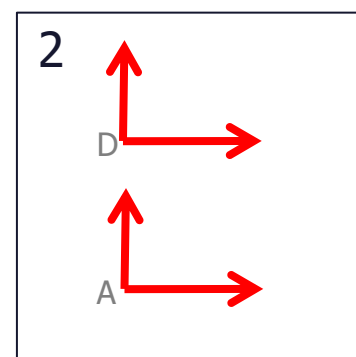
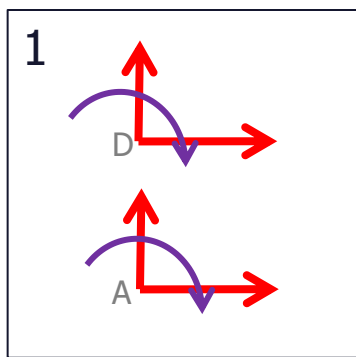
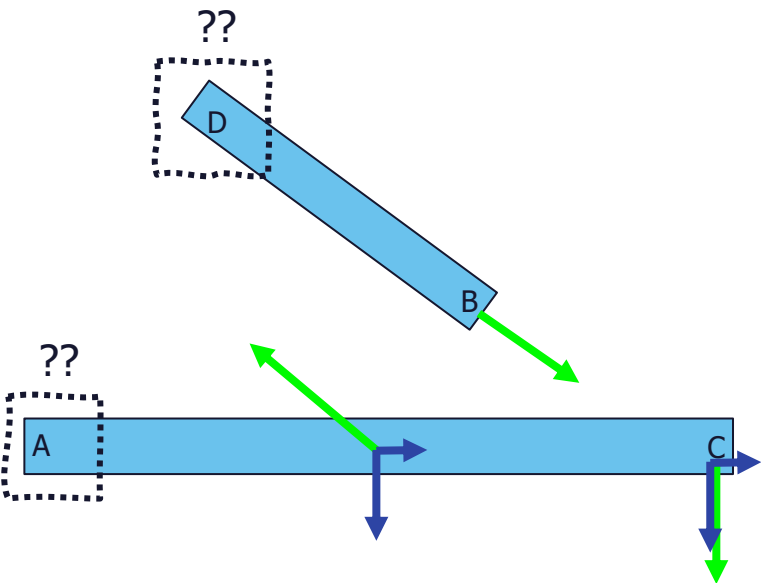
- on considère d'abord chaque support, **un support à la fois**
- on ne réfléchit **pas** aux forces sur système entier au début.







700 kg



Quizz!

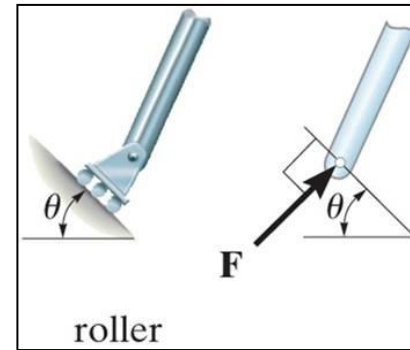
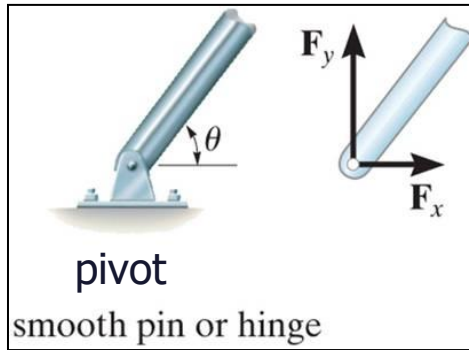
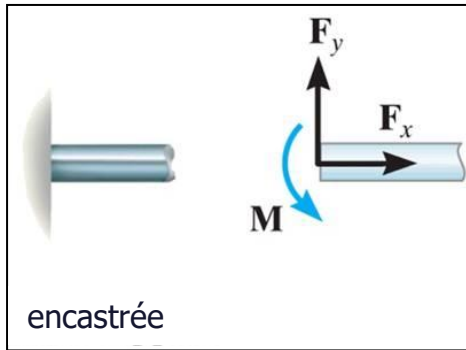
0%	0%	0%	0%	0%	0%
1	2	3	4	5	6

Quel dessin représente correctement les **forces** et les **moments de réaction** du mur sur les poutres aux point A et D ?

Forces de liaison: **rouge**
Moment de liaison: **violet**

FORCES et MOMENTS de REACTION en 2-D

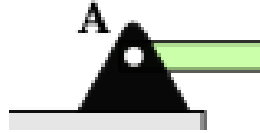
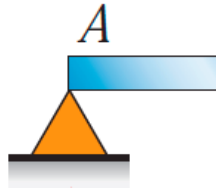
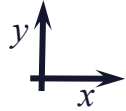
Important!



Règle générale pour forces de liaison parfaites (2D et 3D):

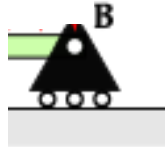
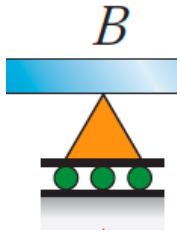
- si un support empêche une **translation** dans une direction, une **force** est générée sur le solide dans la direction opposée.
- si un support empêche une **rotation**, un **moment** est généré sur le solide dans la direction opposée.

Symboles



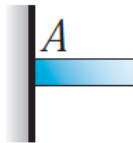
Pivot

- Translation bloquée en x et en y
- Rotation libre



Pivot sur roulettes


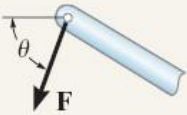
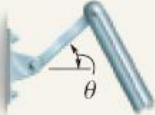
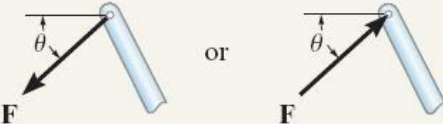


- Translation bloquée en y
- Translation libre en x
- Rotation libre



Poutre encastrée (l'angle poutre-mur est fixe)

- Translation bloquée en x, y
- Rotation bloquée en A

TABLE 5-1 Supports for Rigid Bodies Subjected to Two-Dimensional Force Systems

Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
<p>(1)</p>  <p>cable</p>		<p>One unknown. The reaction is a tension force which acts away from the member in the direction of the cable.</p>
<p>(2)</p>  <p>weightless link</p>		<p>One unknown. The reaction is a force which acts along the axis of the link.</p>
<p>(3)</p>  <p>roller</p>		<p>One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.</p>

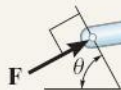
tab05_01a.jpg

Copyright 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

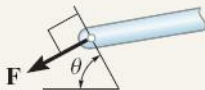
(4)



roller or pin in confined smooth slot



or

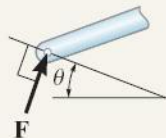


One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the slot.

(5)

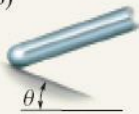


rocker

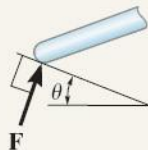


One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.

(6)

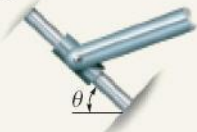


smooth contacting surface

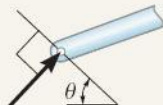


One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the surface at the point of contact.

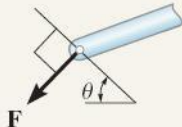
(7)



member pin connected to collar on smooth rod



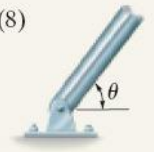
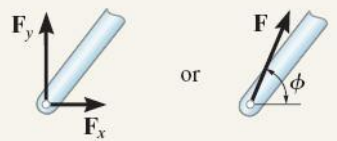



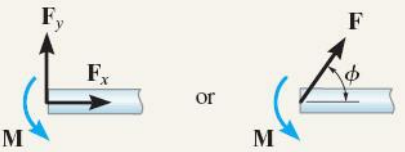
or



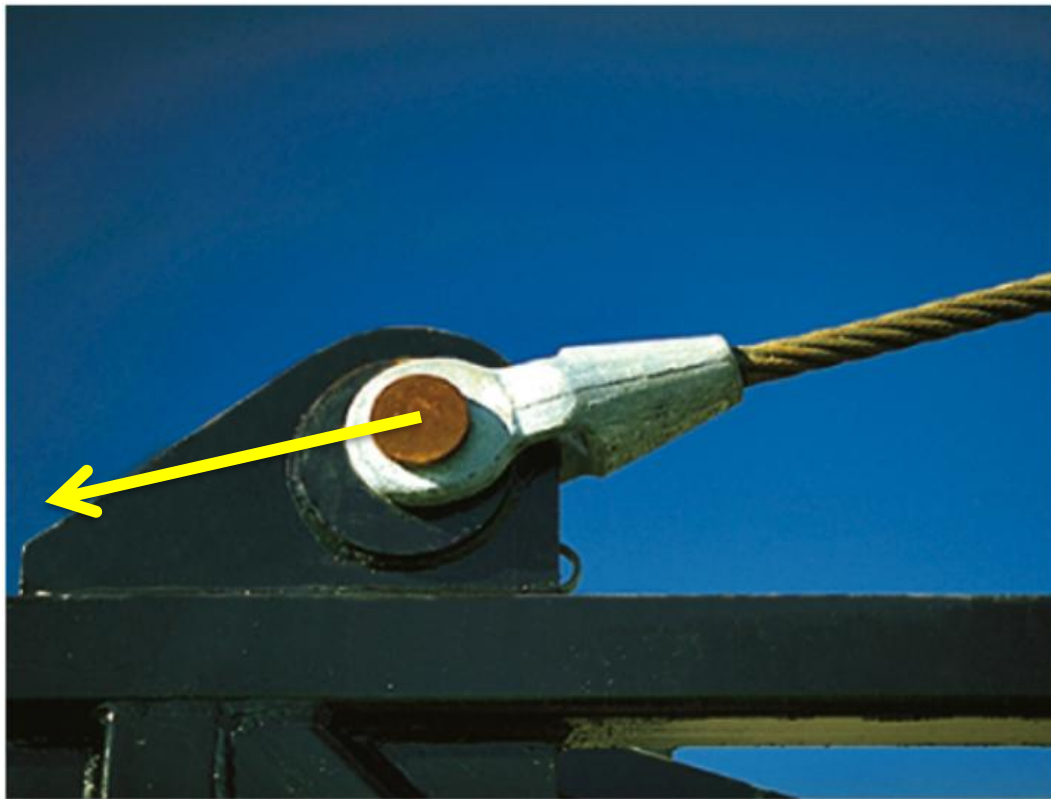
One unknown. The reaction is a force which acts perpendicular to the rod.

tab05_01b.jpg

TABLE 5-1 Continued

Types of Connection	Reaction	Number of Unknowns
<p>(8)</p>  <p>smooth pin or hinge</p>	<p>Reaction</p> 	<p>Two unknowns. The reactions are two components of force, or the magnitude and direction ϕ of the resultant force. Note that ϕ and θ are not necessarily equal [usually not, unless the rod shown is a link as in (2)].</p>
<p>(9)</p>  <p>member fixed connected to collar on smooth rod</p>		<p>Two unknowns. The reactions are the couple moment and the force which acts perpendicular to the rod.</p>
<p>(10)</p>  <p>fixed support</p>	<p>Reaction</p> 	<p>Three unknowns. The reactions are the couple moment and the two force components, or the couple moment and the magnitude and direction ϕ of the resultant force.</p>

tab05_01c.jpg



unfig05_01.jpg - The cable exerts a force on the bracket in the direction of the cable. (1)
Copyright 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

pin



unfig05_04.jpg - This utility building is pin supported at the top of the column. (8) This utility building is pin supported at the top of the column. (8)

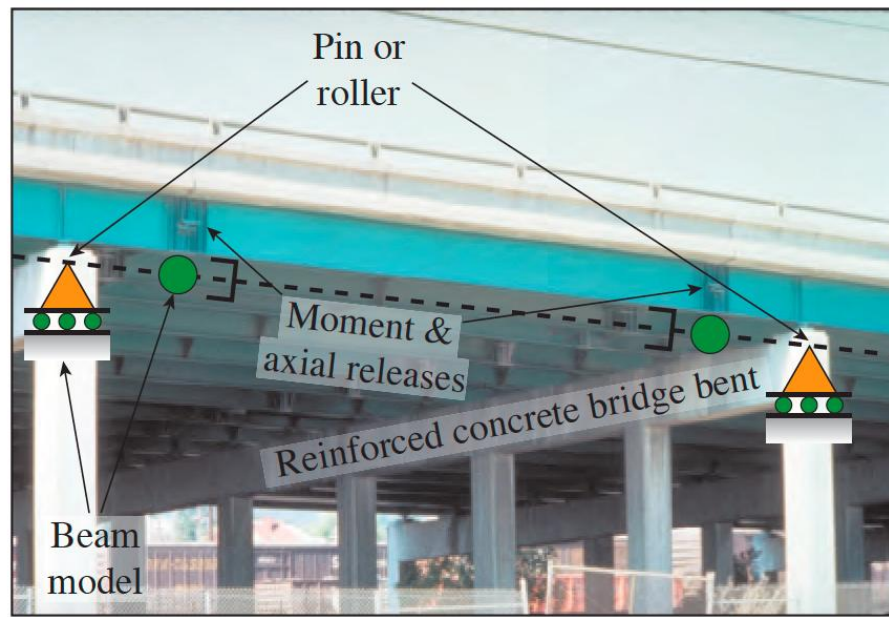
Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.

pin



unfig05_02.jpg - The rocker support for this bridge girder allows horizontal movement so the bridge is free to expand and contract due to a change in temperature. (5) The rocker support for this bridge girder allows horizontal movement so the bridge is free to expand and contract due to a change in temperature. (5)

Copyright © 2010 Pearson Prentice Hall, Inc.



Internal releases and end supports in model of bridge beam

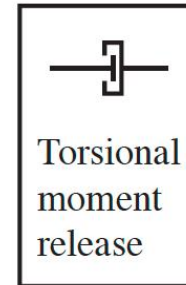
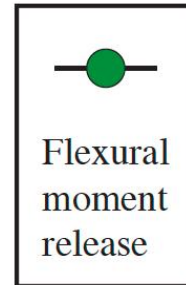
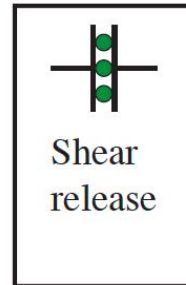
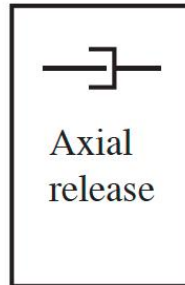
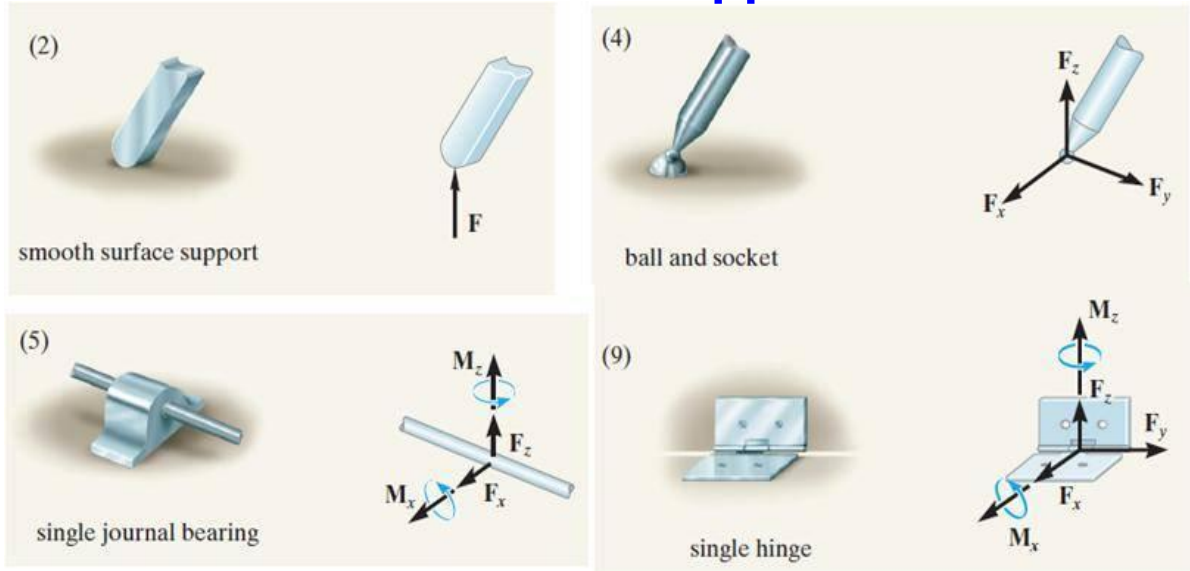


Fig. 4-4

Types of internal member releases for two-dimensional beam and frame members (Courtesy of the National Information Service for Earthquake Engineering EERC, University of California, Berkeley)

© Geere & Goodno

REACTIONS aux supports en 3-D



Rappel Règle générale:

- Si un support empêche une translation dans une direction, une **force** est générée sur le solide dans la direction opposée.
- Si un support empêche une rotation, un **moment** est généré sur le solide dans la direction opposée.

Forces & Moments Internes et Externes au système

→ Forces internes au système:

Tous les objets qui s'échangent les forces appartiennent au système.

→ Forces externes:

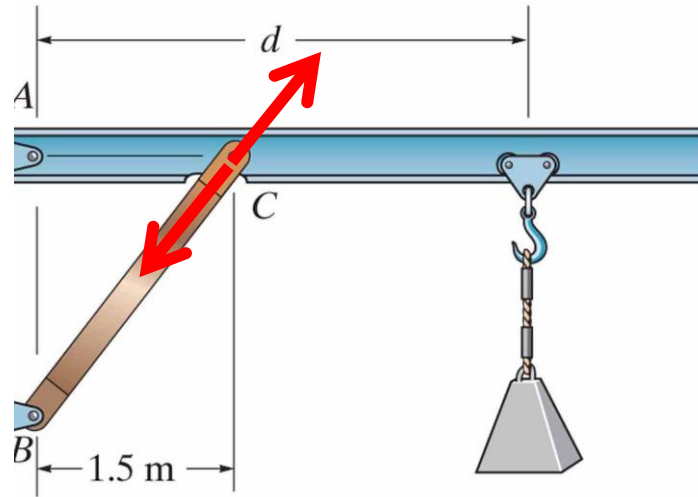
échanges de forces avec des objets n'appartenant pas au système



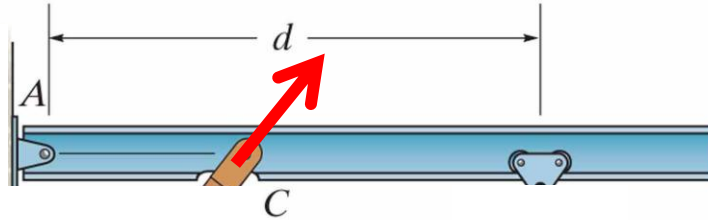
Attention!

La même force sera interne ou externe,
en fonction de votre choix du **système**.

Forces internes et externes au système: un exemple.



Si on considère le système **Poutre bleue + Barre brune**, alors toutes les forces échangées entre la barre et la poutre au point C sont internes au système (et donc leur somme est zéro, et ça ne sert à rien de les dessiner)



Mais si on considère le système **Poutre bleue**, alors les forces au point C dues à la barre brune BC sont considérées externes.

Forces Internes et Externes au système

Toujours (3^{ième} loi de Newton): $\square F_{\text{internes}} = 0$

- Une même force est **Interne** ou **Externe**, cela dépend de ce que l'on choisi comme **système** !
- donc *bien dessiner et bien identifier le système*
- **Pour résoudre les problèmes de statique, nous pouvons ignorer les forces internes (car leur somme est nulle)**

R3. Rappel des bases de la statique

Résoudre des problèmes de **statique** en 3 étapes

- i. Diagramme des forces
- ii. Calcul des forces et moments en utilisant 2^{ième} loi de Newton. **$\Sigma\mathbf{F}=\mathbf{0}$, $\Sigma\mathbf{M}=\mathbf{0}$**
- iii. Analyser + interpréter votre calcul

Statique. Accélération nulle, donc:

$$\sum \overrightarrow{F}_{ext} = 0$$

$$\sum \overrightarrow{M}_{ext, \text{ au point } Z} = 0$$

- Toutes les **forces externes**
- Tous les **moments externes** à un point *Z librement* (et intelligemment) choisi par vous

Statique

- En 2D (problème plan) dans le plan xy

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_z = 0$$

Donc que 3 équations par diagramme des forces

Méthode Générale pour résoudre des problèmes de physique

1. Faites un dessin
2. qu'est-ce qui est donné?
3. qu'est-ce qui est demandé?
4. quelle physique? quelles sont les équations nécessaires?
5. effectuer des calculs sous forme symbolique
6. vérifier vos dimensions physiques (=unités)
7. application numérique
8. indiquez votre réponse avec son unité
9. interprétez vos conclusions.

Recette pour résoudre les problèmes de statique

1. définir le système (**dessin!**), choisir les coordonnées
2. Introduire toutes les forces externes à ce système (=diagramme des corps libres, i.e. des forces)
3. Quels sont les inconnues ? Combien?
4. Utiliser eq. de la statique ($\Sigma F=0$, $\Sigma M=0$). 3
équations en 2D
 - *Seulement si nécessaire* (= s'il y a plus d'inconnues que d'équations): isoler les sous-systèmes et
 - Introduire toutes les forces externes à ces SOUS-système
5. Interpréter!

Remarques

1. Si nous avons **plus d'inconnues que d'équations indépendantes**, le système est indéterminé (alors souvent, mais pas toujours, possible de résoudre en divisant en sous-systèmes)
2. **L'ordre dans lequel nous utilisons les équations** peut simplifier le problème. Par exemple, si nous avons 2 forces inconnues en y , et une force inconnue en x , résoudre $\Sigma F_x = 0$ en premier nous donnera la force horizontale.
3. Si nous trouvons **un scalaire négatif**, c'est que le sens de la force est l'opposé de notre hypothèse de départ.

TECH

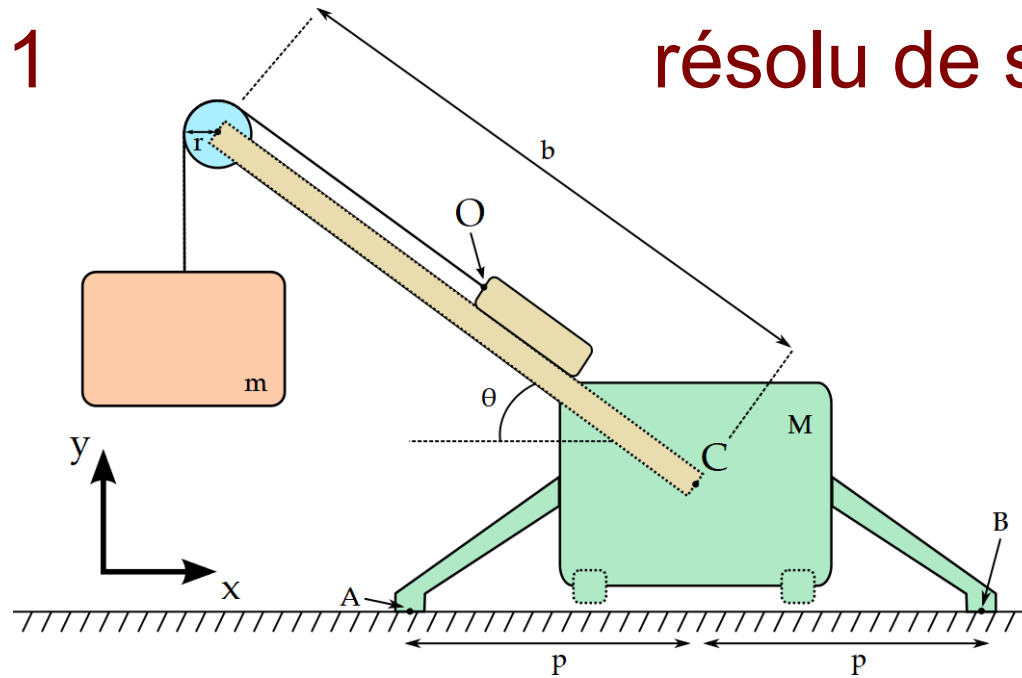
Magazine



<https://www.youtube.com/watch?v=-9GpDdUCLQw>

Exemple 1

résolu de statique



- Q1: Trouver les réactions aux points A et B.
- Q1a: Condition pour que la grue ne chavire pas
- Q2: Trouver l'angle formé par la force de réaction au centre de la poulie avec l'horizontale

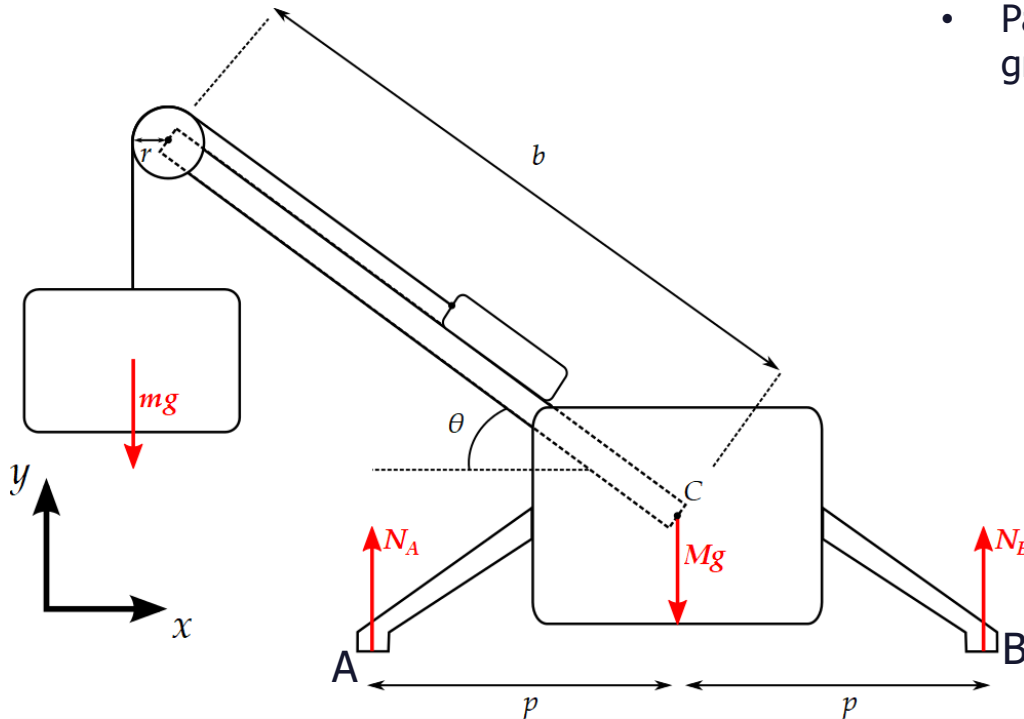
Masses négligeables pour: la poulie, le câble et le bras de longueur b

Q1

Réactions en A et B:

Etude du **système complet** uniquement. Diagramme des forces

- N_{Ax} et N_{Bx} sont zéro par inspection
- Pas de Moment de réaction du sol en A et B car la grue peut pivoter

**2 équations, 2 inconnues (N_a et N_b):**

$$\sum F_y = N_A + N_B - Mg - mg = 0$$

$$\sum M_C = -N_A p + N_B p + mg(b \cos \theta + r) = 0$$

Moment de \vec{N}_A en C(pas de forces en x , donc $\sum F_x = 0$ ne nous donne pas d'info utile)

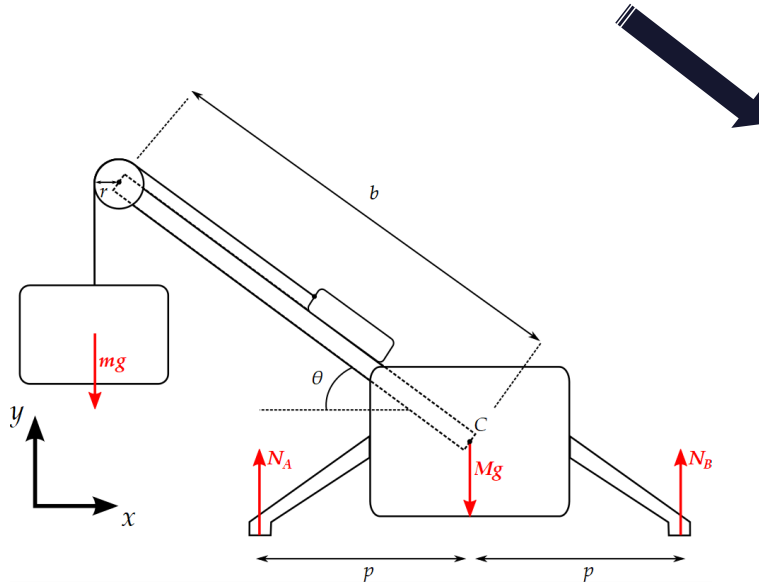
Q1.

Réactions en A et B: Etude du système complet uniquement

$$\sum F_y = N_A + N_B - Mg - mg = 0$$

$$\sum M_C = -N_A p + N_B p + mg(b \cos \theta + r) = 0$$

2 inconnues (N_a et N_b):



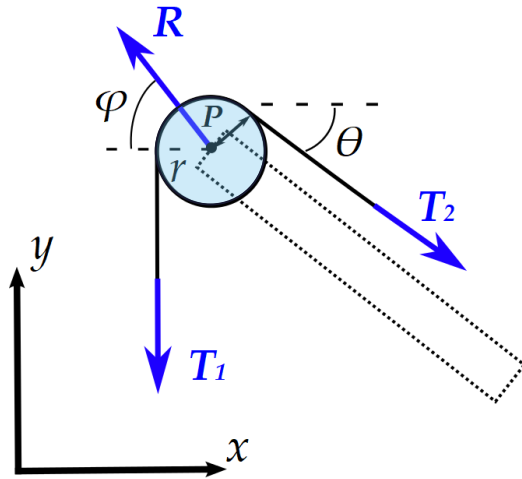
$$N_A = \frac{Mg}{2} + \frac{mg}{2} \left[1 + \frac{b \cos \theta + r}{p} \right]$$
$$N_B = \frac{Mg}{2} + \frac{mg}{2} \left[1 - \frac{b \cos \theta + r}{p} \right]$$

Q1a: la grue se renverse quand $N_B = 0$

Q2.

Cherche Angle ϕ de la force de réaction sur la poulie:

Étude du **sous-système de la poulie uniquement**. Diagramme des forces



$$T = T_1 = T_2 \text{ car } \sum M_P = 0$$

3 forces externes, mais 4 inconnues
(T_1 , T_2 , R et ϕ)

$$\sum F_x = T \cos \theta - R \cos \phi = 0$$

$$\sum F_y = -T - T \sin \theta + R \sin \phi = 0$$

$$\tan \phi = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$$

**Indépendant des
masses m et M**